CONCOURS 1986

OPTIONS M ET P'

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

DURÉE : 4 heures

NOTATIONS :

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ celui des nombres réels, et $\mathbb{R}[x]$ celui des fonctions polynômes à coefficients réels en la variable x.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point; $\mathcal{C}(I)$ est l'ensemble des applications φ de I dans $\mathbb{R}$, telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(n)}$ existe et est continue sur I [$\varphi^{(0)} = \varphi$].

On définit, pour n entier $\geqslant 1$, l'application δ de $\mathcal{C}(I)$ dans $\mathcal{C}(I)$ par :

$\forall x \in I$, $\delta(\varphi)(x) = x \cdot \varphi'(x)$, et l'on pose $\delta^0(\varphi) = \varphi$ avec, pour n entier naturel, $\delta^{n+1}(\varphi) = \delta[\delta^n(\varphi)]$.

I

1. Calculer, pour tout couple (n, k) de $\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$, $\delta^n(x^k)$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k . x^k$; on définit : $P(\delta) = \sum_{k=0}^{n} a_k . \delta^k$.

   Calculer, pour $q \in \mathbb{N}$, $P(\delta)(x^q)$.

3. *a.* Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathcal{C}(I)$ telle que, pour tout $q \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in I$, $(f_n^{(q)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0; calculer, pour $q \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, la limite de $\delta^q(f_n)(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   b. Soit la série entière de terme général $a_k . x^k$ ($k \geqslant 0$), de rayon de convergence $R > 0$, à coefficients réels, et de somme $S(x)$; si $P \in \mathbb{R}[x]$, montrer :

$$|x| < R \Rightarrow P(\delta)(S)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k . P(k) . x^k .$$

4. Soit la série entière de terme général : $\dfrac{P(k) . x^k}{k!}$, $P \in \mathbb{R}[x]$.

   a. Montrer que son rayon de convergence est infini; soit $T(x)$ sa somme.

   b. Montrer que : $T(x) = P(\delta)(\exp x)$, puis, qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que : $T(x) = Q(x) . \exp x$.

   c. Si P est à coefficients entiers, montrer que, si e est la base des logarithmes népériens, $\dfrac{T(1)}{e}$ est entier.

   d. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^4 - 10k^2 + 1}{k!}$$

5. Soit la série entière de terme général : $k^n . x^k$ ($k \geqslant 1$; $n \in \mathbb{N}$).

   a. Montrer que son rayon de convergence est 1, puis comparer sa somme $W_n(x)$ avec $\delta^n\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

   b. Si $x \in]-1, +1[$, soit $f_n(x) = (1-x)^{n+1} . W_n(x)$; montrer que l'on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x) = g(x) . f'_n(x) + h_n(x) . f_n(x)$, et déterminer g et h_n, éléments de $\mathbb{R}[x]$.

   c. Montrer que f_n est, pour tout n, un polynôme à coefficients $\geqslant 0$, et vérifier :

$$W_n(x) \underset{1-}{\sim} \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} .$$

Tournez la page S. V. P.

École Supérieure d'Ingenieurs de Marseille
.Math I

6. Soient P et Q $\in \mathbb{R}[x]$; on suppose que Q n'a aucun zéro dans $\mathbb{N}$, et l'on considère la série entière de terme général :

$$\frac{P(n)}{Q(n)} \cdot x^n \ (n \geqslant 0)$$

a. Vérifier que son ravon de convergence est 1; soit Y (x) sa somme.

b. Montrer : $Q(\delta)(Y)(x) = P(\delta)\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

c. Résoudre l'équation différentielle : $Q(\delta)(y) = P(\delta)\left(\frac{1}{1-x}\right)$ dans le cas où $P(x) = x$ et $Q(x) = 4x^2 - 9$ $(x \in]0, 1[)$, puis calculer :

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2-9}$ pour $x \in]0, +1[$; peut-on en déduire : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-9}$?

II

1. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, de degré n ; montrer : $\exists\, c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x+n+1) = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot P(x+i)$$

2. Soit la série entière de terme général $b_k \cdot x^k$ $(k \geqslant 0)$; on suppose que : $\exists\, n$ entier $\geqslant 1$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, vérifiant :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ b_{p+n+1} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} \cdot b_{p+i} ;$$

On pose : $Q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^{i+1} - 1$; montrer que le rayon de convergence de cette série est > 0, et que sa somme est une fraction rationnelle de dénominateur Q, dont on précisera le numérateur. [On pourra montrer : $\exists\, \alpha > 0$ tel que : $|b_n| \leqslant \alpha^n \ \forall n \in \mathbb{N}$].

3. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$; montrer, à l'aide de ce qui précède, que : $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n) \cdot x^n$ est une fraction rationnelle; pourrait-on déduire ce résultat de la partie I ?

4. Résoudre l'équation :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(n) \cdot x^n = \frac{x^4 - 10x^2 + 1}{(1-x)^5} \qquad \forall x \in]-1, +1[,$$

P étant un élément de $\mathbb{R}[x]$ à déterminer.